

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Дискретный анализ
по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	Математика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
курс:	2
квалификация:	бакалавр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

3 (осенний) - Дифференцированный зачет

4 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 120 всего, в том числе:

лекции: 60 час.

семинары: 60 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 75 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 225, всего зач. ед.: 5

Количество контрольных работ, заданий: 4

Программу составил: А.М. Райгородский, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 05.03.2020

Аннотация

Курс Дискретный анализ является продолжением курса Основы комбинаторики и теории чисел. Большая часть курса посвящена теории графов. Изучаются как базовые определения и классические задачи, так и современные результаты и тенденции. В частности, рассматриваются вероятностный и линейно-алгебраический методы и их применения для решения задач экстремальной комбинаторики

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

изучение математических основ современной комбинаторики, а также подготовка слушателей к дальнейшей самостоятельной работе в области комбинаторных задач прикладной математики, физики и информационных технологий.

Задачи дисциплины

- изучение математических основ современной комбинаторики;
- приобретение слушателями теоретических знаний в области комбинаторного анализа задач, возникающих на практике;
- освоение аналитического и алгебраического аппарата дискретной математики и получение навыков работы с основными дискретными структурами.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-4 Способен осуществлять сбор и обработку научно-технической и (или) технологической информации для решения фундаментальных и прикладных задач	ОПК-4.3 Умеет составлять аннотации, рефераты, библиографические перечни и обзоры информации в области своей профессиональной деятельности
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- фундаментальные понятия, законы, теории части дискретной математики;
- современные проблемы соответствующих разделов дискретной математики;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач дискретной математики.

уметь:

понять поставленную задачу;
 использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач;
 оценивать корректность постановок задач;
 строго доказывать или опровергать утверждение;
 самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
 самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
 точно представить математические знания в области в устной и письменной форме.

владеть:

навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
 навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
 культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов;
 предметным языком дискретной математики и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Асимптотики.	10	10		
2	Биномиальные коэффициенты.	8	8		
3	Плоские графы.	8	8		
4	Эйлеровы пути и циклы в графах.	4	4		30
5	Вероятностный метод.	10	10		
6	Гамильтоновы циклы и пути.	10	10		
7	Теорема Турана.	10	10		45
Итого часов		60	60		75
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		225 час., 5 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 3 (Осенний)

1. Асимптотики.

Асимптотики. Формула Стирлинга.

2. Биномиальные коэффициенты.

Биномиальные коэффициенты. Оценки для факториалов и биномиальных коэффициентов.

3. Плоские графы.

Плоские графы. Формула Кэли. Унициклические графы.

4. Эйлеровы пути и циклы в графах.

Эйлеровы пути и циклы в графах. Критерий эйлеровости орграфа. Последовательности и графы де Брёйна.

Семестр: 4 (Весенний)

5. Вероятностный метод.

Вероятностный метод. Случайные графы. Неравенства Маркова и Чебышёва. Неравенство для случайного блуждания. Моменты и факториальные моменты.

6. Гамильтоновы циклы и пути.

Гамильтоновы циклы и пути. Достаточное условие гамильтоновости графа.

7. Теорема Турана.

Теорема Турана. Дистанционные графы. Понятие симплекса в пространстве. Оценка числа ребер у дистанционного графа в произвольной размерности.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Стандартная учебная аудитория.

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Дискретный анализ. Комбинаторика. Алгебра логики. Теория графов [Текст] : учеб. пособие для вузов / Ю. И. Журавлев, Ю. А. Флеров, О. С. Федько ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— М. : МФТИ, 2012 .— 248 с.
2. Дискретный анализ. Формальные системы и алгоритмы : учебное пособие для вузов / Ю. И. Журавлев, Ю. А. Флеров, М. Н. Вялый .— 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Юрайт, 2020 .— (Высшее образование) .— Электрон. версия печ. публикации .— Полный текст (Доступ из сети МФТИ / Удаленный доступ).

Дополнительная литература

1. Дискретный анализ. Основы высшей алгебры : учебное пособие для вузов / Ю. И. Журавлев, Ю. А. Флеров, М. Н. Вялый .— 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Юрайт, 2020 .— (Высшее образование) .— Электрон. версия печ. публикации .— Полный текст (Доступ из сети МФТИ / Удаленный доступ).

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<https://www.mccme.ru/circles/oim/discrbook.pdf>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Не используются

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

1. Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.
2. Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	Математика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
курс:	<u>2</u>
квалификация:	бакалавр
Семестры, формы промежуточной аттестации:	
3 (осенний) - Дифференцированный зачет	
4 (весенний) - Экзамен	
Разработчик:	А.М. Райгородский, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-4 Способен осуществлять сбор и обработку научно-технической и (или) технологической информации для решения фундаментальных и прикладных задач	ОПК-4.3 Умеет составлять аннотации, рефераты, библиографические перечни и обзоры информации в области своей профессиональной деятельности
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Дискретный анализ» обучающийся должен:

знать:

фундаментальные понятия, законы, теории части дискретной математики;
современные проблемы соответствующих разделов дискретной математики;
понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
основные свойства соответствующих математических объектов;
аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач дискретной математики.

уметь:

понять поставленную задачу;
использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач;
оценивать корректность постановок задач;
строго доказывать или опровергать утверждение;
самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
точно представить математические знания в области в устной и письменной форме.

владеть:

навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов;
предметным языком дискретной математики и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

примеры контрольных работ приведен в отданных файлах.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Перечень типовых вопросов к экзамену и вопросов
Задача 1. Найдите $m(2)$ и $m(3)$.

Задача 2. Найдите как можно более точные оценки для m (4).

Задача 3. Найдите m ($n, 3, 1$).

Задача 4. На планете Марс 100 государств объединены в блоки, в каждом из которых не больше 50 государств. Известно, что любые два государства состоят вместе хотя бы в одном блоке. Найдите минимально возможное число блоков.

Задача 5. Ровно 19 вершин правильного 97-угольника покрашено в белый цвет, остальные вершины покрашены в чёрный. Тогда число равнобедренных одноцветных треугольников с вершинами в вершинах 97-угольника не зависит от способа раскраски. (Треугольник одноцветный, если все его вершины или белые, или чёрные.)

Задача 6. Пусть G - n -однородный гиперграф с k вершин. Докажите, что существует раскраска вершин N в четыре цвета, при которой в каждом ребре есть все цвета.

Задача 7. Найдите $R(3, 3)$ и $R(3, 4)$.

Задача 8. Пусть $R(3, 3, 3)$ – это минимальное n такое, что при любой раскраске ребер в красный, жёлтый и зелёный цвета найдется одноцветный треугольник. Вычислите $R(3, 3, 3)$,

Задача 9. Пусть $R(k, l, m)$ – естественное обобщение для $R(3, 3, 3)$. Напишите какое-нибудь рекуррентное неравенство, доказывающее, что величина $R(k, l, m)$ всегда корректно определена.

Задача 10. В любом множестве из n различных натуральных чисел найдётся подмножество из более чем $n/3$ чисел, в котором нет трёх чисел, сумма двух из которых равна третьему.

Задача 11 Код Прюфера. Формула Кэли.

Задача 12. Точная формула для числа унициклических графов.

Задача 13. Определение плоских и планарных графов. Формула Эйлера (б/д). Примеры непланарных графов. Критерий Понтрягина-Куратовского планарности графов (б/д).

Задача 14. Пути и циклы. Простые пути и циклы. Критерии эйлеровости графа и ориентированного графа.

Задача 15. Последовательности и графы де Брейна. Случай алфавита 0,1 и подслов произвольной длины. Правило 0 лучше 1 (б/д).

Задача 16. Гамильтоновы пути и циклы. Достаточное условие Дирака гамильтоновости графа.

Задача 17. Вершинная связность и число независимости графа. Достаточное условие гамильтоновости в их терминах (б/д). Гамильтоновость графа 1-пересечений 3-элементных подмножеств n -элементного множества.

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения экзамена или зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.

Контрольная 1. Дискретный анализ. Вариант 1.

Можно пользоваться всем доказанным на семинарах, при этом должна быть выписанная четкая формулировка факта, которым вы пользуетесь. Все остальные утверждения нужно доказывать/обосновывать.

1. Найдите сумму $\sum_{i=0}^n iC_n^i 2^i 3^{n-i}$.

2. Найдите предел при $n \rightarrow \infty$ следующей функции $f(n) = \ln(n!C_{4n}^{2n})$. Формулой Стирлинга пользоваться без доказательства нельзя.

3. При каких n можно нарисовать все стороны и диагонали выпуклого многоугольника неотрывая ручки от бумаги?

4. Пусть G_1 и G_2 графы на пронумерованных числами от 1 до n вершинах. Определим $G_1 + G_2$ следующий образом: рассмотрим объединение G_1 и G_2 на разных наборах вершин и соединим вершины из разных графов с одинаковыми номерами. Верно ли, что граф $G_1 + G_2$ содержит гамильтонов путь(цикл), если G_1 и G_2 оба содержат гамильтоновы пути(циклы)?

5. Вес дерева с пронумерованными вершинами вычисляется следующим образом. На каждом ребре пишется сумма номеров его концов, затем подсчитывается сумма чисел написанных на ребрах, это величине будем называть весом. Найдите количество деревьев на n вершинах пронумерованных от 1 до n , с весом равным $\frac{n(n+1)}{2} + (2n - 3)$.

Контрольная 1. Дискретный анализ. Вариант 2.

Можно пользоваться всем доказанным на семинарах, при этом должна быть выписанная четкая формулировка факта, которым вы пользуетесь. Все остальные утверждения нужно доказывать/обосновывать.

1. Найдите сумму $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i C_n^i C_i^j$.

2. Найдите асимптотику при $n \rightarrow \infty$ следующей функции $f(n) = \frac{(2+\frac{1}{n})^n}{C_{2n}^n}$. Формулой Стирлинга пользоваться можно без доказательства.

3. Является ли следующий граф эйлеровым? Пусть $A = \{1, 2, \dots, n\}$, вершины соответствуют всевозможным подмножествам A , ребром соединены пересекающиеся множества: $(X, Y) \in E \Leftrightarrow X \cap Y \neq \emptyset$.

4. Докажите, что следующий ориентированный граф является гамильтоновым. Вершины соответствуют последовательностям длины k в алфавите из n элементов. Ориентированным ребром соединены вершины $a_1 a_2 \dots a_k$ и $b_1 b_2 \dots b_k$ такие, что $a_2 a_3 \dots a_k = b_1 b_2 \dots b_{k-1}$.

5. Вес дерева с пронумерованными вершинами вычисляется следующим образом. На каждом ребре пишется сумма номеров его концов, затем подсчитывается сумма чисел написанных на ребрах, это величину будем называть весом. Найдите количество деревьев на n вершинах пронумерованных от 1 до n , с весом равным $\frac{n(n+1)}{2} + (2n - 3)$.

Контрольная 1. Дискретный анализ. Вариант 3.

Можно пользоваться всем доказанным на семинарах, при этом должна быть выписанная четкая формулировка факта, которым вы пользуетесь. Все остальные утверждения нужно доказывать/обосновывать.

1. Найдите сумму $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{i-1} C_n^i C_n^j$.

2. Найдите асимптотику при $n \rightarrow \infty$ следующей функции $f(n) = \frac{(3+\frac{1}{n})^n}{C_{3n}^n}$. Формулой Стирлинга пользоваться можно без доказательства.

3. Является ли следующий граф эйлеровым? Пусть $A = \{1, 2, \dots, n\}$, вершины соответствуют всевозможным непустым подмножествам A , ребром соединены пересекающиеся множества: $(X, Y) \in E \Leftrightarrow X \cap Y \neq \emptyset$.

4. Может ли и граф и его дополнение иметь хотя по 1000 различных гамильтоновых циклов?

5. Вес дерева с пронумерованными вершинами вычисляется следующим образом. На каждом ребре пишется сумма номеров его концов, затем подсчитывается сумма чисел написанных на ребрах, эту величину будем называть весом. Найдите количество деревьев на n вершинах пронумерованных от 1 до n , с весом не более $\frac{n(n+1)}{2} + (2n - 3)$.

Контрольная 2. Дискретный анализ. Вариант 1.

Можно пользоваться всем доказанным на семинарах, при этом должна быть выписана четкая формулировка факта, которым вы пользуетесь. Все остальные утверждения нужно доказывать/обосновывать.

1. Найдите асимптотику $f(n) = \sum_{x=1}^n (2x - 1)^k$.

2. Существует ли граф, который невозможно нарисовать без самопересечений на плоскости, но можно на сфере?

3. В некоей школе k классов, в них суммарно учатся n человек и действует несколько кружков. Известно, что в любой кружок ходит нечетное число человек, а для любых двух кружков количество людей ходящих в оба эти кружка — четно. Также известно, что в каждой кружок ходит четное число людей из каждого класса кроме класса "7910". Найдите максимальное возможное количество кружков.

4. Найдите матожидание количества способов раскрасить вершины случайного графа $G(3n, p)$ в 3 цвета, так что каждого цвета было ровно n вершин. При каких значениях $p = p(n)$ можно гарантировать, что такая раскраска найдется.

5. Докажите, что объединение планарного и двудольного графа можно раскрасить в 10 цветов.

Контрольная 2. Дискретный анализ. Вариант 2.

Можно пользоваться всем доказанным на семинарах, при этом должна быть выписана четкая формулировка факта, которым вы пользуетесь. Все остальные утверждения нужно доказывать/обосновывать.

1. Найдите асимптотику $f(n) = \sum_{x=1}^n \sum_{y=1}^x y^k$.

2. Существует ли выпуклый многогранник, все грани которого пятиугольники или шестиугольники, и из каждой вершины которого выходит 5 или 6 ребер?

3. В некоем городе живут n семей, каждая состоит из 3 человек, еще k холостых человека и действует несколько кружков. Известно, что в любой кружок ходит нечетное число человек, а для любых двух кружков количество людей ходящих в оба эти кружка — четно. Также известно, что в каждой кружок ходит четное число людей из каждой семьи. Найдите максимальное возможное количество кружков.

4. Найдите матожидание количества способов раскрасить вершины случайного графа $G(4n, p)$ в 4 цвета, так что каждого цвета было ровно n вершин. При каких значениях $p = p(n)$ можно гарантировать, что такая раскраска найдется.

5. Пусть в графе степень каждой вершины не больше, чем три. Докажите, что его вершины можно покрасить в 7 цветов, так что не было двух одноцветных вершин на расстоянии ровно два.